http://v-olymp.ru/

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по физике
2008/2009 учебный год

10 класс

.

Задача 1

Удав решил установить мировой рекорд в прыжках в высоту среди удавов. Удав может из положения «свернувшись лежа» выпрямиться почти вертикально и разогнаться до скорости *V*. Длина Удава *L*. Каким может быть рекорд? Как должен двигаться Удав, чтобы установить рекорд? Масса Удава распределена равномерно по его длине.

Решение

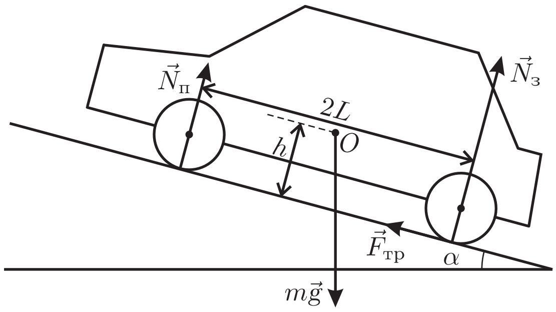
Пусть H – высота планки над уровнем земли, M – масса удава. Будем отсчитывать потенциальную энергию также от уровня земли. Тогда начальная механическая энергия удава сразу после его выпрямления равна $Mg\frac{L}{2}+\frac{MV^2}{2}$. Чтобы ее хватило для преодоления планки как можно большей высоты, удав должен двигаться так, чтобы его центр масс в момент преодоления планки находился как можно ниже. Для этого удав должен сложиться пополам так, чтобы его середина оказалась над планкой, а голова и хвост свешивались вниз. При этом центр масс удава поднимется на максимальную высоту, равную $H-\frac{L}{4}$, и в этот момент кинетическая энергия удава будет равна нулю. Из закона сохранения механической энергии для такого способа движения удава получаем: $Mg\frac{L}{2}+\frac{MV^2}{2}\geq Mg\left(H-\frac{L}{4}\right)$, откуда $H\leq\frac{3L}{4}+\frac{V^2}{2g}$.

Ответ: Рекордная высота равна $\frac{3L}{4}+\frac{V^2}{2g}$.

Задача 2

Автомобиль с задними ведущими колесами въезжает вверх по прямолинейному участку дороги, образующему с горизонтом угол α, и останавливается. Через некоторое время после этого водитель резко нажимает на газ и одновременно отпускает тормоз. С каким максимальным ускорением может начать двигаться автомобиль, если коэффициент трения его колес о дорогу равен μ, а мощность двигателя достаточно велика? Центр тяжести автомобиля находится на расстоянии h от дороги посередине между колесами, расстояние между осями передних и задних колес равно $2L$.

Решение



Уравнение движения автомобиля в момент начала движения с максимальным ускорением (см. рисунок) имеет следующий вид:

$$ma = F_{тр} - mg\sin\alpha,$$

где m – масса автомобиля, g – ускорение свободного падения, а $F_{тр} = \mu N_з$ – максимальная величина силы трения задних ведущих колес о дорогу. Суммарная сила давления передних и задних колес на дорогу равна проекции силы тяжести автомобиля на нормаль к дороге:

$$N_з + N_п = mg\cos\alpha.$$

Поскольку автомобиль не должен опрокидываться в момент старта, по правилу моментов относительно точки O (центра масс автомобиля) имеем:

$$N_з L = N_п L + F_{тр} h.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$a = \left(\frac{\mu L\cos\alpha}{2L - \mu h} - \sin\alpha\right) g.$$

Полученное решение справедливо при условии $L > \mu h$, так как $N_п > 0$.

Ответ: $a = \left(\frac{\mu L\cos\alpha}{2L - \mu h} - \sin\alpha\right) g$, при условии $L > \mu h$.

Задача 3

Горизонтальная платформа, на которую положили без начальной скорости груз массой m, совершает f раз в секунду такие колебания: сначала она движется вправо с постоянным ускорением a, потом мгновенно останавливается и возвращается в начальное положение с постоянным ускорением $a/2$. Коэффициент трения между грузом и платформой равен $\mu < 1$, ускорение $a >> g$, частота $f >> 1$ Гц. В каком направлении, и по какому закону будет двигаться груз, и будет ли он вообще двигаться? Считать, что скорость движения груза всегда много меньше максимальной скорости движения платформы.

Решение

Поскольку $a >> g$ и $\mu < 1$, груз будет все время скользить относительно платформы. Поэтому на него будет все время действовать сила трения скольжения $F = \mu mg$, постоянная по величине, но направленная то вправо, то влево.

Сравним времена движения платформы вправо t_1 и влево t_2. Поскольку движение платформы равноускоренное и пройденные вправо и влево пути равны, то $\frac{at_1^2}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{t_2^2}{2}$, откуда $t_2 = \sqrt{2} t_1$. Таким образом, влево платформа движется дольше, чем вправо. Значит, на груз будет дольше действовать сила трения, направленная влево, и он станет смещаться влево. Так как $t_1 + t_2 = \frac{1}{f}$ и $t_2 = \sqrt{2} t_1$, получаем: $t_1 = \frac{1}{f(1+\sqrt{2})}$, $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{f(1+\sqrt{2})}$.

Таким образом, изменение импульса груза за время $\Delta t = 1$ секунде составляет

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = mb = f(\mu mgt_1 - \mu mgt_2) = \mu mg \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}},$$

где $b = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ – среднее ускорение груза (за положительное направление принято направление движения груза вправо). Следовательно, груз будет двигаться влево со средним ускорением, равным по модулю $|\vec{b}| = \mu g \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

Ответ: груз будет двигаться влево со средним ускорением, равным по модулю $|\vec{b}| = \mu g \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

Задача 4

В цилиндрический стакан объемом $V = 200$ мл и сечением $S = 20$ см^2, стоящий на столе при комнатной температуре $T_к = 20$ °C, положили кусок льда массой $m = 100$ г, находящийся при температуре $T_0 = 0$ °C, и накрыли стакан плотно прилегающей крышкой. Оцените силу, которая потребуется, чтобы оторвать крышку от стакана сразу после того, как лед растает. Считайте, что теплота поступает в стакан только снизу, крышку отрывают сразу по всему периметру, атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Решение

Для получения оценки будем считать, что к тому моменту, когда весь лед растает и превратится в воду с температурой $T_0 = 0$ °C, воздух в стакане охладится от льда до той же температуры $T_0 = 0$ °C. Также пренебрежем давлением насыщенных паров талой воды. Обозначим давление, которое установится к указанному моменту в стакане, через p. Тогда для находящегося под крышкой воздуха можно записать закон Клапейрона:

$$\frac{p_а(V - V_л)}{T_к} = \frac{p(V - V_в)}{T_0}.$$

Здесь $V_л = m/\rho_л$ и $V_в = m/\rho_в$ – объем куска льда и объем образовавшейся при его таянии воды, $T_к$ и T_0 – абсолютные температуры. Отсюда

$$p = \frac{p_а T_0}{T_к}\frac{V - V_л}{V - V_в} \approx 0{,}84 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Так как $p < p_а$, то на крышку будет действовать сила, прижимающая ее к стакану. Такую же силу надо приложить к крышке, чтобы оторвать ее от стакана сразу по всему периметру; она равна

$$F = (p_а - p)S = p_а S\left(1 - \frac{T_0}{T_к}\frac{V - V_л}{V - V_в}\right) = p_а S\left(1 - \frac{\rho_в T_0}{\rho_л T_к}\frac{(\rho_л V - m)}{(\rho_в V - m)}\right) \approx 32 \text{ Н}.$$

Ответ: Сила, которая потребуется, чтобы оторвать крышку от стакана сразу после того, как лед растает, примерно равна $F = p_{\text{а}}S\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}T_0}{\rho_{\text{л}}T_{\text{к}}}\frac{(\rho_{\text{л}}V - m)}{(\rho_{\text{в}}V - m)}\right) \approx 32$ Н.

Задача 5

Пять сторон правильного шестиугольника образованы одинаковыми диэлектрическими равномерно заряженными палочками. При этом в точке *O*, находящейся в центре шестиугольника, потенциал данной системы зарядов равен φ_0, а напряженность электрического поля равна $\vec{E}_0$. Найдите, какими станут потенциал φ и напряженность электрического поля $\vec{E}$ в точке *O*, если убрать одну из заряженных палочек.

Решение

Потенциалы, создаваемые каждой из пяти заряженных палочек в точке *O*, одинаковы, и складываясь, дают φ_0. Поэтому вклад в потенциал от каждой из них равен $\frac{\varphi_0}{5}$. Если удалить любую из этих палочек, то потенциал в точке *O* станет равным $\varphi = \frac{4}{5}\varphi_0$.

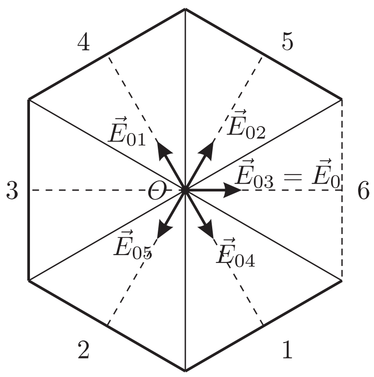


Рисунок 1

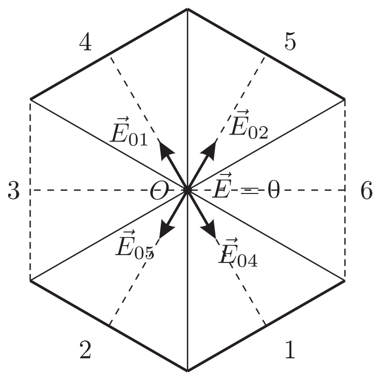


Рисунок 2а

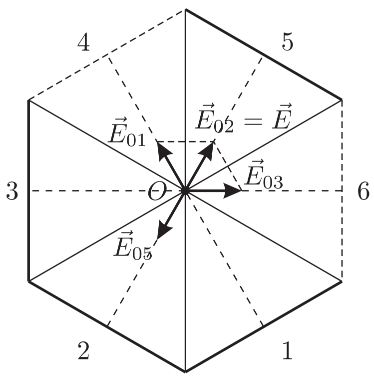


Рисунок 2б

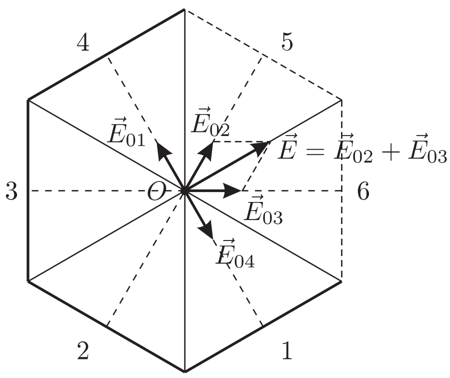


Рисунок 2в

Очевидно, что поле, создаваемое каждой заряженной палочкой в точке *O*, лежит в плоскости шестиугольника, одинаково по величине и направлено перпендикулярно этой палочке (см. рисунок 1). Поля от палочек 1 и 4, 2 и 5 компенсируют друг друга: $\vec{E}_{01}+\vec{E}_{04}+\vec{E}_{02}+\vec{E}_{05}=0$, так что $\vec{E}_{0}=\vec{E}_{03}$. Поэтому, если удалить палочку 3 (см. рисунок 2а), то $\vec{E}=0$. Если удалить палочку 4 (см. рисунок 2б), то $\vec{E}=\vec{E}_{02}$, так как $\vec{E}_{01}+\vec{E}_{03}+\vec{E}_{05}=0$; модуль $|\vec{E}|=|\vec{E}_{0}|$, а вектор $\vec{E}$ повернут относительно вектора $\vec{E}_{0}$ на угол 60°. Аналогичный результат получится после удаления палочки 2: $\vec{E}=\vec{E}_{04}$. Наконец, если удалить палочку 5 (см. рисунок 2в), то $\vec{E}=\vec{E}_{02}+\vec{E}_{03}$, $|\vec{E}|=\sqrt{3}|\vec{E}_{0}|$, а вектор $\vec{E}$ повернут относительно вектора $\vec{E}_{0}$ на угол 30°. Аналогичный результат получится после удаления палочки 1: $\vec{E}=\vec{E}_{03}+\vec{E}_{04}$.

Ответ: $\varphi=\frac{4}{5}\varphi_{0}$ при удалении любой из палочек. $\vec{E}$ зависит от того, какую палочку удаляют (см. рисунки 2а, 2б, 2в): если удалить палочку 3, то $\vec{E}=0$; если удалить палочку 2 или 4, то $|\vec{E}|=|\vec{E}_{0}|$, а вектор $\vec{E}$ повернут относительно вектора $\vec{E}_{0}$ на угол 60°; если удалить палочку 1 или 5, то $|\vec{E}|=\sqrt{3}|\vec{E}_{0}|$, а вектор $\vec{E}$ повернут относительно вектора $\vec{E}_{0}$ на угол 30°.